**Циклоидальные кривые**

**Эпитрохоида** (от греч. на и колесо) — плоская кривая, образуемая точкой, жёстко связанной с окружностью, катящейся по другой окружности.

Описывается параметрическими уравнениями

***x* = (*R* + *mR*)cos(*mt*) − *h*cos(*t* + *mt*)**

***y* = (*R* + *mR*)sin(*mt*) − *h*sin(*t* + *mt*)**

*R* - радиус неподвижной окружности; *r -* радиус катящейся окружности; *h -* расстояние от центра катящейся окружности до точки; *m* = *r*/*R*

Если *h* = *r*, эпитрохоида образует эпициклоиду. Также при *h* > *r*, получаемую фигуру называют *удлинённой эпициклоидой*, а при *h* < *r* — *укороченной эпициклоидой.*Собственные имена получили ещё два варианта эпитрохоиды: *r* = *R* (*m* = 1) — *улитка Паскаля*; *h* = *R* + *r* — *Роза*. На рисунках ниже зелёным цветом изображена неподвижная окружность радиуса R=1, а тёмно-синим - кривая, очерчиваемая движущейся точкой.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Удлиненная эпитрохоида** R=1; r=0.2; h=0.3; | **Улитка Паскаля** R=1; r=1; h=1.5 | **Роза** R=1; r=1/6; h=1+1/6 |
| %% Удлиненная эпитрохоида roots=0; width=200 fmin=-2-2i; fmax=2+2i xmax=10\*pi  R = 1; r=0.2; m=r/R h=0.3 x=(R+m\*R)\*cos(m\*t)-h\*cos(t+m\*t) y=(R+m\*R)\*sin(m\*t)-h\*sin(t+m\*t) XY(t)=x+i\*y XY1=exp(i\*t/5); color1=00aa00 | %% Улитка Паскаля roots=0; width=200 fmin=-4-4i; fmax=4+4i xmax=2\*pi  R = 1; r=1; m=r/R h=1.5 x=(R+m\*R)\*cos(m\*t)-h\*cos(t+m\*t) y=(R+m\*R)\*sin(m\*t)-h\*sin(t+m\*t) XY(t)=x+i\*y XY1=exp(i\*t); color1=00aa00 | %% Роза roots=0; width=200 points=200 fmin=-3-3i; fmax=3+3i xmax=12\*pi  R = 1; r=1/6; m=r/R h=1+1/6 x=(R+m\*R)\*cos(m\*t)-h\*cos(t+m\*t) y=(R+m\*R)\*sin(m\*t)-h\*sin(t+m\*t) XY(t)=x+i\*y XY1=exp(i\*t/6);color1=00aa00 |
| |  | | --- | | <http://physics-animations.com/cgi-bin/gra.pl?roots=0;width=200;fmin=-2-2i;fmax=2+2i;xmax=10*pi%20;R%20=%201;r=0.2;m=r/R;h=0.3;x=(R+m*R)*cos(m*t)-h*cos(t+m*t);y=(R+m*R)*sin(m*t)-h*sin(t+m*t);XY(t)=x+i*y;XY1=exp(i*t/5);color1=00aa00> | | |  | | --- | | <http://physics-animations.com/cgi-bin/gra.pl?roots=0;%20width=200;fmin=-4-4i;fmax=4+4i;xmax=2*pi%20;R%20=%201;%20r=1;%20m=r/R;h=1.5;x=(R+m*R)*cos(m*t)-h*cos(t+m*t);y=(R+m*R)*sin(m*t)-h*sin(t+m*t);XY(t)=x+i*y;XY1=exp(i*t);color1=00aa00> | | |  | | --- | | [Роза](http://physics-animations.com/cgi-bin/gra.pl?roots=0;%20width=200;points=200;fmin=-3-3i;fmax=3+3i;xmax=12*pi%20;R%20=%201;%20r=1/6;%20m=r/R;h=1+1/6;x=(R+m*R)*cos(m*t)-h*cos(t+m*t);y=(R+m*R)*sin(m*t)-h*sin(t+m*t);XY(t)=x+i*y;XY1=exp(i*t/6);color1=00aa00) | |
|  |  |  |
| **Укороченная эпитрохоида** R=1; r=0.2; h=0.1; | **Эпициклоида** R=1; r=0.1; h=0.1 |  |
| %% Укороченная эпитрохоида roots=0; width=200 fmin=-2-2i; fmax=2+2i xmax=10\*pi  R = 1; r=0.2; m=r/R h=0.1 x=(R+m\*R)\*cos(m\*t)-h\*cos(t+m\*t) y=(R+m\*R)\*sin(m\*t)-h\*sin(t+m\*t) XY(t)=x+i\*y XY1=exp(i\*t/5); color1=00aa00 | %% Эпициклоида roots=0; width=200 fmin=-2-2i; fmax=2+2i xmax=10\*pi  R = 1; r=0.2; m=r/R h=0.2 x=(R+m\*R)\*cos(m\*t)-h\*cos(t+m\*t) y=(R+m\*R)\*sin(m\*t)-h\*sin(t+m\*t) XY(t)=x+i\*y XY1=exp(i\*t/5); color1=00aa00 |  |
| |  | | --- | | <http://physics-animations.com/cgi-bin/gra.pl?roots=0;%20width=200;fmin=-2-2i;fmax=2+2i;xmax=10*pi%20;R%20=%201;%20r=0.2;%20m=r/R;h=0.1;x=(R+m*R)*cos(m*t)-h*cos(t+m*t);y=(R+m*R)*sin(m*t)-h*sin(t+m*t);XY(t)=x+i*y;XY1=exp(i*t/5);color1=00aa00> | | |  | | --- | | <http://physics-animations.com/cgi-bin/gra.pl?roots=0;%20width=200;fmin=-2-2i;fmax=2+2i;xmax=10*pi%20;R%20=%201;%20r=0.2;%20m=r/R;h=0.2;x=(R+m*R)*cos(m*t)-h*cos(t+m*t);y=(R+m*R)*sin(m*t)-h*sin(t+m*t);XY(t)=x+i*y;XY1=exp(i*t/5);color1=00aa00> | |  |

**Улитка Паскаля** ― плоская алгебраическая кривая 4-го порядка; конхоида окружности относительно точки на окружности, частный случай Декартова овала, она также является эпитрохоидой. Названа по имени Этьена Паскаля (отца Блеза Паскаля), впервые рассмотревшего её.  
  
Уравнение в прямоугольных координатах:  
**(*x*2+ y2- *ay*)2 = *l*2(*x*2+*y*2)**  
в полярных координатах:  
***r* = *l* - *a***·**sin(φ)**

Начало координат  
 - узловая при *a* > *l*.   
 - точка возврата при *a* = *l* (в этом случае Улитка Паскаля называется кардиоидой).   
 - двойная точка, изолированная при *a* < *l*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***a* > *l*** | ***a* = *l*** | ***a* < *l*** |
| xmax=4\*pi fmin=-2-3i fmax=2+i l=1; a=2 r=l-a\*sin(fi) f(fi)=cplxe(r,fi) | xmax=4\*pi fmin=-2-3i fmax=2+i l=1; a=1 r=l-a\*sin(fi) f(fi)=cplxe(r,fi) | xmax=4\*pi fmin=-2-3i fmax=2+i l=1; a=0.5 r=l-a\*sin(fi) f(fi)=cplxe(r,fi) |
| |  | | --- | | <http://physics-animations.com/cgi-bin/gra.pl?xmax=4*pi;fmin=-2-3i;fmax=2+i;l=1;%20a=2;r=l-a*sin(fi);f(fi)=cplxe(r,fi)> | | |  | | --- | | <http://physics-animations.com/cgi-bin/gra.pl?xmax=4*pi;fmin=-2-3i;fmax=2+i;l=1;%20a=1;r=l-a*sin(fi);f(fi)=cplxe(r,fi)> | | |  | | --- | | <http://physics-animations.com/cgi-bin/gra.pl?xmax=4*pi;fmin=-2-3i;fmax=2+i;l=1;%20a=0.5;r=l-a*sin(fi);f(fi)=cplxe(r,fi)> | |
|  |  |  |
| ***l* = 1/25 ... 2** |  |  |
| nmax=50; animated(0,0) xmax=4\*pi l=1; a=(n+1)/25 r=l-a\*sin(fi) f(fi)=cplxe(r,fi) |  |  |
| |  | | --- | | <http://physics-animations.com/cgi-bin/gra.pl?nmax=50;%20animated(0,0);xmax=4*pi;l=1;%20a=(n+1)/25;r=l-a*sin(fi);f(fi)=cplxe(r,fi)> | |  |  |

**Эпициклоида** (от греческих слов на и окружность) — плоская кривая, образуемая точкой окружности, катящейся по другой окружности. Эпициклоида - частный случай Эпитрохоиды, т.к. точка лежит в точности на окружности радиуса r, а не на расстоянии h от её центра, как в случаеЭпитрохоиды.

Описывается параметрическими уравнениями

***x = (R + mR)cos(mt) - mcos(t + mt)  
y = (R + mR)sin(mt) - msin(t + mt)***

где *m*=*r*/*R*; *R* — радиус неподвижной окружности;*r* — радиус катящейся окружности.

Модуль величины m определяет форму эпициклоиды. На рисунках показаны эпициклоиды при m = 1/10, m = 1/3 и m = 2/3. При m = 1 эпициклоида образует кардиоиду**. Кардиоида**(от греч. сердце и вид) — плоская линия, которая описывается фиксированной точкой окружности, катящейся по неподвижной окружности с таким же радиусом. Получила своё название из за схожести своих очертаний со стилизованным изображением сердца. На рисунках ниже зелёным цветом изображена неподвижная окружность радиуса R=1, атёмно-синим - кривая, очерчиваемая движущейся точкой.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **m = 1/10** | **m = 1/3** | **m = 2/3** |
| roots=0; width=200 fmin=-1.5-1.5i; fmax=1.5+1.5i xmax=20\*pi  R = 1; m=1/10 x=(R+m\*R)\*cos(m\*t)-m\*cos(t+m\*t) y=(R+m\*R)\*sin(m\*t)-m\*sin(t+m\*t) XY(t)=x+i\*y XY1=exp(i\*t/10); color1=00aa00 | roots=0; width=200 fmin=-2-2i; fmax=2+2i xmax=6\*pi  R=1; m=1/3 x=(R+m\*R)\*cos(m\*t)-m\*cos(t+m\*t) y=(R+m\*R)\*sin(m\*t)-m\*sin(t+m\*t) XY(t)=x+i\*y XY1=exp(i\*t/3); color1=00aa00 | roots=0; width=200 fmin=-2.5-2.5i; fmax=2.5+2.5i xmax=6\*pi  R=1; m=2/3 x=(R+m\*R)\*cos(m\*t)-m\*cos(t+m\*t) y=(R+m\*R)\*sin(m\*t)-m\*sin(t+m\*t) XY(t)=x+i\*y XY1=exp(i\*t/3); color1=00aa00 |
| |  | | --- | | <http://physics-animations.com/cgi-bin/gra.pl?roots=0;%20width=200;fmin=-1.5-1.5i;%20fmax=1.5+1.5i;xmax=20*pi%20;R%20=%201;%20m=1/10;x=(R+m*R)*cos(m*t)-m*cos(t+m*t);y=(R+m*R)*sin(m*t)-m*sin(t+m*t);XY(t)=x+i*y;XY1=exp(i*t/10);color1=00aa00> | | |  | | --- | | <http://physics-animations.com/cgi-bin/gra.pl?roots=0;%20width=200;fmin=-2-2i;%20fmax=2+2i;xmax=6*pi%20;R=1;%20m=1/3;x=(R+m*R)*cos(m*t)-m*cos(t+m*t);y=(R+m*R)*sin(m*t)-m*sin(t+m*t);XY(t)=x+i*y;XY1=exp(i*t/3);color1=00aa00> | | |  | | --- | | <http://physics-animations.com/cgi-bin/gra.pl?roots=0;%20width=200;fmin=-2.5-2.5i;%20fmax=2.5+2.5i;xmax=6*pi%20;R=1;%20m=2/3;x=(R+m*R)*cos(m*t)-m*cos(t+m*t);y=(R+m*R)*sin(m*t)-m*sin(t+m*t);XY(t)=x+i*y;XY1=exp(i*t/3);color1=00aa00> | |
|  |  |  |
| **Кардиоида (m=1)** |  |  |
| roots=0; width=200 fmin=-3-3i; fmax=3+3i R=1; m=1 x=(R+m\*R)\*cos(m\*t)-m\*cos(t+m\*t) y=(R+m\*R)\*sin(m\*t)-m\*sin(t+m\*t) XY(t)=x+i\*y XY1=exp(i\*t); color1=00aa00 |  |  |
| |  | | --- | | <http://physics-animations.com/cgi-bin/gra.pl?roots=0;%20width=200;fmin=-3-3i;%20fmax=3+3i;R=1;%20m=1;x=(R+m*R)*cos(m*t)-m*cos(t+m*t);y=(R+m*R)*sin(m*t)-m*sin(t+m*t);XY(t)=x+i*y;XY1=exp(i*t);color1=00aa00> | |  |  |

**Гипоциклоида** (от греческих слов под и окружность) — плоская кривая, образуемая точкой окружности, катящейся внутри другой окружности без скольжения. Описывается параметрическими уравнениями:

***x=(R-mR)·cos(mt) + m·cos(t-mt)  
y=(R-mR)·sin(mt) - m·sin(t-mt)***

где *m*=*r*/*R*; *R* — радиус неподвижной окружности; *r* — радиус катящейся окружности. Модуль величины определяет форму гипоциклоиды. При *m*=1/4 является астроидой. На рисунках ниже зелёным цветом изображена неподвижная окружность радиуса R=1, а тёмно-синим - кривая, очерчиваемая движущейся точкой.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Астроида (m = 1/4)** | **m = 1/2.1** |  |
| roots=0; width=200 xmax=8\*pi  R=1; m=1/4 x=(R-m\*R)\*cos(m\*t)+m\*cos(t-m\*t) y=(R-m\*R)\*sin(m\*t)-m\*sin(t-m\*t) XY(t)=x+i\*y XY1=exp(i\*t/4); color1=00aa00 | roots=0; width=200 xmax=42\*pi  fmin=-1-i; fmax=1+i R=1; m=1/2.1 x=(R-m\*R)\*cos(m\*t)+m\*cos(t-m\*t) y=(R-m\*R)\*sin(m\*t)-m\*sin(t-m\*t) XY(t)=x+i\*y XY1=exp(i\*t/21); color1=00aa00 |  |
| |  | | --- | | <http://physics-animations.com/cgi-bin/gra.pl?roots=0;%20width=200;xmax=8*pi%20;R=1;%20m=1/4;x=(R-m*R)*cos(m*t)+m*cos(t-m*t);y=(R-m*R)*sin(m*t)-m*sin(t-m*t);XY(t)=x+i*y;XY1=exp(i*t/4);color1=00aa00> | | |  | | --- | | [http://physics-animations.com/cgi-bin/gra.pl?roots=0;%20width=200;fmin=-1-i;%20fmax=1+i;xmax=42*pi%20;R=1;m=1/2.1;x=(R-m*R)*cos(m*t)+m*cos(t-m*t);y=(R-m*R)*sin(m*t)-m*sin(t-m*t);XY(t)=x+i*y;XY1=exp(i*t/21);color1=00aa00](http://physics-animations.com/cgi-bin/gra.pl?roots=0;%20width=200;fmin=-1-i;%20fmax=1+i;xmax=42*pi%20;R=1;m=1/2.1;x=(R-m*R)*cos(m*t)+m*cos(t-m*t);y=(R-m*R)*sin(m*t)-m*sin(t-m*t);XY(t)=x+i*yXY1=exp(i*t/21);color1=00aa00) | |  |

**Трохоида** (от греч. колесообразный) — плоская трансцендентная кривая, описываемая параметрическими уравнениями:

***x = r****·****t - h****·****sin(t)   
y = r - h****·****cos(t)***  
  
Представляет собой траекторию точки, жестко связанной с окружностью радиуса *r*, катящейся без скольжения по прямой (в приведённом примере такой прямой является горизонтальная ось координат). Расстояние точки от центра окружности — *h*. Также описывает, например, движение заряда q в случае одновременного наличия однородных и постоянных электрического (E) и магнитного (B) полей, перпендикулярных друг другу и первоначальному направлению движения заряда. В этом случае траекторию движения частицы можно представить как сумму двух движений: в направлении, перпендикулярном скрещенным полям, заряд движется с постоянной дрейфовой скоростью, а в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, он движется по окружности с циклотронной частотой. Также известно, что например, период колебаний материальной точки, скользящей по перевёрнутой циклоиде не зависит от амплитуды, этот факт используется в точных механических часах. Детали машин, которые совершают одновременно вращательное и поступательное движение, описывают циклоидальные кривые (циклоида, эпициклоида, гипоциклоида, трохоида, астроида).

Если *h* = *r*, то трохоида переходит в циклоиду. При *h* > *r* трохоиду называют удлинённой циклоидой, а при h < r — укороченной циклоидой.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Трохоида** | **Циклоида** |  |
| nmax=5; animated(100,0) xmax=6\*pi  width=400 r = 1; h=(n+1)/3 x=r\*t-h\*sin(t) y=r-h\*cos(t) XY(t)=x+i\*y | a=0.4 %% Изменять a от 0 до 1 fbox=1; width=400; ratio=1; points=10; roots=0; spline=1 xmin=0; xmax=2\*pi p0=i+2\*pi\*a  p1=i+2\*pi\*a+exp(-i\*2\*pi\*a+i\*3\*pi/2) r = 1 x=r\*(t-sin(t)) y=r\*(1-cos(t))  XY(t)=x+i\*y XY1=(p0\*(xmax-x)+p1\*(x-xmin))/(xmax-xmin); color1=00aa00 XY2=i+2\*pi\*a+exp(-i\*x); color2=00aa00 |  |
| |  | | --- | | <http://physics-animations.com/cgi-bin/gra.pl?;nmax=5;%20animated(100,0);xmax=6*pi%20;width=400;r%20=%201;h=(n+1)/3;x=r*t-h*sin(t);y=r-h*cos(t);XY(t)=x+i*y> | | |  | | --- | |  | |  |
|  | http://physics.nad.ru/images/weel.gif |  |

|  |
| --- |
|  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |